HOOFDSTUKKEN UIT DE GEOMETRISCHE FUNCTIETHEORIE

PROF.DR. A.F. MONNA

Mathematisch Instituut der
Rijksuniversiteit Utrecht
1974

I. Inleiding

Dit college gaat over een onderdeel van de theorie van de complexe analytische functies dat wel wordt genoemd de geometrische functietheorie. Ter toelichting van deze naam dient het volgende korte historische overzicht.

Na de beginperiode van de complexe functietheorie met namen als D'Alembert, Euler en vooral Cauchy, kunnen twee richtingen in deze theorie worden onderscheiden, nl. die van Riemann en die van Weierstrass.

Riemann

Zij $w = f(z)$ een analytische functie in een open verzameling. Riemann splitst z en w in het reële en imaginaire deel $z = x+iy$, $w = u+iv$. Daardoor worden u en v functies van x en y die, wegens de differentieerbaarheid van f, voldoen aan de zgn. differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann (maar Euler en D'Alembert hadden ze al)

$$\frac{du}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Daaruit volgt (de verdere differentieerbaarheid is een gevolg van de analyticiteit)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

d.w.z. u en v zijn harmonische functies (zie het college klassieke potentiaaltheorie). Op deze manier komt de potentiaaltheorie erin. Riemann gebruikt dan ook fysische beelden in zijn theorie. Men kan de eigenschappen van de functie f illustreren met het beeld van een vloeistofstroom in het z-vlak (het x-y-vlak). Tekent men de krommen $u(x,y)$ = constant, dan is u de snelheidspotentiaal van een stroming. De snelheid is gegeven door $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $\frac{\partial u}{\partial y}$. De krommen

v(x,y) = constant vormen dan wegens de vergelijkingen van Cauchy-Riemann een stelsel dat orthogonaal staat op het stelsel u = constant (stroomlijnen en potentialen; ga dit na). Dit fysische beeld wordt overigens in dit college niet gebruikt.
Riemann gebruikt deze methode om de eigenschappen te bestuderen van w = f(z) als afbeelding van een z-vlak in een w-vlak. Dit leidt hem tot de zogenaamde afbeeldingsstelling van Riemann:
Elke enkelvoudig samenhangende open verzameling met meer dan één randpunt kan conform worden afgebeeld op de eenheidscirkel $|w| < 1$.
Het onderdeel van een functietheorie waarin men de eigenschappen van deze afbeelding bestudeert heet de geometrische functietheorie. Men kent eigenschappen over de gedaante van het beeld (zgn. vervormingsstellingen), die een min of meer meetkundig karakter hebben). Ook bestudeert men de omkeerfunctie, die dus als gebied van definitie de open eenheidscirkel heeft; men komt dan tot de zgn. univalente functies: dat zijn functies die een waarde slechts éénmaal in het gebied van definitie aannemen.

Weierstrass

Weierstrass volgde in zijn ontwikkeling van de theorie van de complex analytische functies een geheel andere koers. Hij volgde de algebraïsch-arithmetische richting (hij wantrouwde de meetkundige weg van Riemann met de Riemann-oppervlakken). Voor hem is het uitgangspunt een machtreeks

$$\sum_0^\infty a_n z^n .$$

Dit is het functie-element met behulp waarvan hij functies genereert m.b.v. het procédé van de analytische voortzetting. Het totaal van de gegenereerde machtreeksen heet bij Weierstrass een analytische functie en de opdracht is de eigenschappen van die functies af te leiden uit de coëfficiënten van het gegeven

functie-element. Dit gaat terug tot het oude idee van Euler van een functie als een analytische uitdrukking. Men vraagt bijv. naar de singuliere punten.

De beide richtingen zijn overigens niet strikt gescheiden (er zijn voorbeelden in dit college, o.a. het coëfficiëntenprobleem van de univalente functies).

Het complete bewijs van de afbeeldingsstelling van Riemann wordt in dit college niet gegeven. Maar wel worden voorbeelden gegeven. Voor zover potentiaaltheoretische begrippen worden gebruikt zullen deze kort worden toegelicht.

Literatuur

Ahlfors, Complex analysis.

Ahlfors, Conformal invariants. Topics in geometric function theory. 1973.

Nehari, Conformal mapping. 1952.

Carathéordory, Conformal representation. 1952

Polya & Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II, hoofdstuk 2.

Oudere literatuur (niettemin lezenswaard):

Julia, Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes. 1931.

Julia, Principes géométriques d'analyse I, II. 1930.

Bieberbach, Konforme Abbildung. Sammlung Göschen.

Cohn, Conformal mappings on Riemann surfaces

Inleidende begrippen

1. De verzameling van de punten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ waarvoor

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

waarin x en y continue functies van t zijn heet een continue kromme (boog). Ook aangeduid door

$$z = z(t).$$

2. Als voor een continue kromme geldt

$$\left.\begin{array}{l} x(t') = x(t'') \\ y(t') = y(t'') \end{array}\right\} \Rightarrow t' = t'',$$

dan spreekt men van een Jordan-kromme.

3. Een continue kromme met precies één dubbelpunt, nl. het punt waarvoor $t = t_1$ resp. $t = t_2$ heet een gesloten Jordan-kromme. Bijvoorbeeld de cirkel

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

4. De stelling van Jordan zegt dat een gesloten Jordan-kromme het vlak verdeelt in twee delen, het inwendige (dat begrensd is) en het uitwendige. Dit is een moeilijke topologische stelling.

5. Een Jordan-kromme waarvoor x en y differentieerbare functies van t zijn en waarvoor $x'(t)$ en $y'(t)$ voor geen waarde van t tegelijk 0 zijn, heet een differentieerbare kromme. Meetkundig: in elk punt is er een raaklijn.

6. Men spreekt van een analytische kromme indien x en y analytische functies van t zijn.

7. Een verzameling $S \subset \mathbb{R}^2$ heet samenhangend indien elk paar punten van S kan worden verbonden door een in S liggende Jordan-kromme.

8. Onder een gebied wordt in dit college verstaan een open samenhangende verzameling.
9. Steeds zal worden aangenomen dat het x-y-vlak (het z-vlak) is gecompactificeerd met behulp van één punt: het "punt in het oneindige".

II. Conforme afbeeldingen

Behandeld worden afbeeldingen van het z-vlak in het w-vlak door analytische functies $w = f(z)$.

II.1. Het beeld van een Jordan-kromme (resp. differentieerbare, analytische kromme) is weer een dergelijke kromme. Echter: het beeld van een zichzelf niet snijdende kromme heeft niet steeds weer deze eigenschap. Daarvoor is nl. vereist dat $f(z_1) \neq f(z_2)$ voor alle z_1 en z_2 in het gebied waarin f is gedefinieerd en $z_1 \neq z_2$. Dat is niet steeds waar. Voorbeeld: de functie $w = z^2$. Functies die deze eigenschap wel hebben heten univalente functies, ook wel schlichte-functies. Deze functies worden in dit college behandeld.

II.2. Zij f regulier in het gebied Ω. Dan is het beeld van Ω weer een gebied.

Men moet dan het begrip gebied een passende uitbreiding geven opdat dit geldt voor Riemann-oppervlakken (meervoudige overdekkingen, vertakkingspunten). In een eenvoudig geval is het bewijs als volgt: Zij

$$w = f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

regulier in een omgeving B van $z = 0$. Stel $c_1 = f'(0) \neq 0$. Dan is er een cirkel in het w-vlak om $w = 0$ die wordt overdekt door de waarden van f in B, d.w.z. f neemt in een omgeving van $z = 0$ alle

waarden aan in een omgeving van $w = 0$ en wel precies éénmaal. Er is nl. een cirkel K om $z = 0$ waarbinnen $z = 0$ het enige nulpunt van f is (ga dit na). Stel ook op de rand van K is $f(z) \neq 0$. Stel $|f(z)| \geq m > 0$ op die rand. Zij $\alpha \in \mathbb{C}$ en $|\alpha| < m$. Beschouw $f(z)-\alpha$. Volgens de stelling van Rouché hebben f en $f-\alpha$ in K evenveel nulpunten, dus 1. D.w.z. de waarde α wordt $1 \times$ aangegeven. Hieruit volgt dat het beeld van B open is. Samenhangendheid van het beeld volgt uit de continuïteit. Heeft f een n-voudig nulpunt in $z = 0$ dan wordt het beeld een gebied met een vertakkingspunt (Riemann's oppervlak).

Stelling van Rouché. Stel f en g zijn regulier in de afsluiting $\overline{\Omega}$ van een gebied Ω. Stel op de rand $\partial\Omega$ is $f \neq 0$ en $|g| < |f|$. Dan hebben f en f+g evenveel nulpunten in Ω.

We hebben in de voorafgaande stelling een simpel geval van een conforme invariant: het begrip gebied is invariant bij conforme afbeeldingen.

II.3. Conforme afbeeldingen

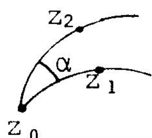
Een afbeelding van $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heet conform indien zij de hoek tussen elk paar differentieerbare krommen invariant laat.

Stelling. Zij f regulier in Ω. Zij $z_0 \in \Omega$ en $f'(z_0) \neq 0$. Dan is de afbeelding conform in z_0.

Bewijs. Stel

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_1(t) \\ y_1 = y_1(t) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x_2 = x_2(t) \\ y_2 = y_2(t) \end{array}\right\}$$

of korter $z_1 = z_1(t)$, $z_2 = z_2(t)$, zijn twee differentieerbare krommen door z_0. Stel $|z_1-z_0| = |z_2-z_0| = r$.



Dan is

$$z_1-z_0 = re^{i\theta_1}, \quad z_2-z_0 = re^{i\theta_2},$$

$$\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0} = e^{i(\theta_2-\theta_1)},$$

zodat $\theta_2-\theta_1$ gelijk is aan de hoek van de segmenten z_2-z_0 en z_1-z_0. Is α de hoek van de krommen in z_0 dan is

$$\alpha = \lim_{r\to 0} (\arg \frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}).$$

Zijn w_1 en w_2 de beelden door f van z_1 en z_2 en is β de hoek van de beeldkrommen, dan is

$$\beta = \lim_{r\to 0} (\arg \frac{w_2-w_0}{w_1-w_0})$$

$$= \lim \arg \frac{f(z_2)-f(z_0)}{f(z_1)-f(z_0)}$$

$$= \lim \arg \frac{\frac{f(z_2)-f(z_0)}{z_2-z_0}}{\frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0}} \cdot \frac{z_2-z_0}{z_1-z_0} .$$

Daar $f'(z_0) \neq 0$ volgt hieruit $\beta = \alpha$.

Opmerking. Is $f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ en $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, dan wordt de hoek m × zo groot; ga dit na.

Het omgekeerde geldt. Beschouw een continu differentieerbare afbeelding $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ waarbij u en v continu differentieerbaar zijn in het beschouwde gebied. Stel de Jacobeaan van de transformatie $(x,y) \to (u,v)$

$$u_x v_y - u_y v_x \neq 0.$$

Stel de hoeken tussen differentieerbare krommen zijn invariant bij deze afbeelding. Beschouw de krommen

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{array}\right\},$$

elkaar snijdend in (x_0,y_0) voor $t = t_0$. De hoek met de positieve x-as is resp. bepaald door

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_1'(t_0)}{x_1'(t_0)}, \qquad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{y_2'(t_0)}{x_2'(t_0)}.$$

Men kan onderstellen dat $y_1'(t_0) = 0$, dus $\alpha_1 = 0$.

Voor de hoek α tussen de krommen in het punt $t = t_0$ geldt dan $\alpha = \alpha_2$. De beelden bij de afbeelding $(x,y) \rightarrow (u,v)$ zijn

$$u = u_i(t) = u(x_i(t),y_i(t)), \quad i = 1,2.$$

$$v = v_i(t) = v(x_i(t),y_i(t)), \quad i = 1,2,.$$

Voor de hoek met de positieve u-as geldt

$$\text{tg } \beta_1 = \frac{v_1'}{u_1'} = \frac{v_x x_1' + v_y y_1'}{u_x x_1' + u_y y_1'} = \frac{v_x}{u_x},$$

$$\text{tg } \beta_2 = \frac{v_x x_2' + v_y y_2'}{u_x x_2' + u_y y_2'} .$$

Daar de afbeelding conform is geldt $\beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 = \alpha$. Dan volgt

$$\text{tg } \alpha = \frac{\dfrac{v_x + v_y \text{ tg } \alpha}{u_x + u_y \text{ tg } \alpha} - \dfrac{v_x}{u_x}}{1 + \dfrac{v_x}{u_x}\left(\dfrac{v_x + v_y \text{tg } \alpha}{u_x + u_y \text{ tg } \alpha}\right)},$$

waaruit volgt

$$(u_x u_y + v_x v_y) \text{ tg } \alpha - u_x v_y + v_x u_y + u_x^2 + v_x^2 = 0.$$

Dit geldt voor alle $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, zodat

$$u_x u_y + v_x v_y = 0 \quad \text{en} \quad u_x v_y - v_x u_y = u_x^2 + v_x^2,$$

ofwel

$$\left.\begin{aligned} u_x(u_x - v_y) + v_x(v_x + u_y) &= 0 \\ -v_x(u_x - v_y) + u_x(v_x + u_y) &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

De determinant van dat stelsel is $u_x^2 + v_x^2$ en die is $\neq 0$, zodat er alleen nuloplossingen zijn. Dus

$$u_x = v_y \quad \text{en} \quad v_x = -u_y,$$

d.w.z. u en v voldoen aan de vergelijkingen van Cauchy-Riemann. Dit impliceert dat u+iv een regulier analytische functie is.

M.a.w.: in punten waar de Jacobeaan $\neq 0$ is, volgt de analyticiteit uit de conformiteit.

Toelichting op de vergelijking van Cauchy-Riemann

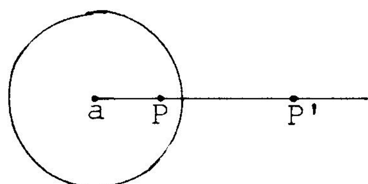
Het reële en imaginaire deel van een analytische functie voldoen aan de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann. Bovendien volgt uit de analyticiteit dat u en v dan oneindig vaak differentieerbaar zijn; u en v zijn harmonische functies.
Een omkering van deze eigenschap geldt. Hebben u en v continue eerste afgeleiden in een gebied Ω en voldoen u en v aan de vergelijkingen van Cauchy-Riemann, dan is $u+iv$ analytisch in Ω.
In 1923 heeft Looman bewezen dat dit zelfs geldt onder de zwakkere conditie dat de eerste afgeleiden van u en v bestaan (dus zonder de eis van continue differentieerbaarheid) en voldoen aan C.R.
Uit deze eigenschappen volgt, dat de theorie van de harmonische functies en de complexe analytische functies essentieel dezelfde zijn. De complexe formulering is echter eleganter.

Bij afbeeldingen door analytische functies blijven hoeken invariant. Wat kan men beweren over de lengte van een differentieerbare kromme in de omgeving van een punt?
Laat $z = z(t)$ een differentieerbare kromme zijn en beschouw deze kromme in de omgeving van het punt $t = t_0$. Geef met s aan de booglengte in het z-vlak en met S de booglengte in het w-vlak. Dan is

$$\frac{dS}{ds} = \frac{dS}{dt}\Big/\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{u'^2+v'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \left|\frac{dw}{dt}\right|\Big/\left|\frac{dz}{dt}\right| = \left|\frac{dw}{dz}\right| .$$

Dit betekent dat $\frac{dS}{ds}$ in het punt $t = t_0$ slechts afhangt van de absolute waarde van f in dat punt, niet van de kromme door $t = t_0$.
Conforme afbeelding geeft een dilatatie, bepaald door $|f'(z_0)|$.

"Kleine driehoekjes" worden gelijkvormig afgebeeld.
Men kan bewijzen, dat een continu differentieerbare afbeelding waarvoor deze eigenschap van de lengte van bogen geldt, de hoeken invariant laat zodat de afbeelding is bepaald door een analytische functie; er wordt hier niet op ingegaan. Men zie de literatuur over complexe functietheorie.
Men kan algemener beschouwen differentieerbare afbeeldingen van $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die de hoek tussen krommen invariant laten. Er blijkt dan een groot verschil te bestaan tussen het geval $n = 2$ en de gevallen $n \geqslant 3$.
A. Het geval $n = 2$ leidt tot de complexe functietheorie en er is dus een ruime klasse van afbeeldingen.
B. Voor het geval $n \geqslant 3$ zijn er aanzienlijk minder transformaties. Zij kunnen expliciet worden aangegeven.
De volgende stelling is in 1850 door Liouville bewezen.
Stelling. Elke conforme afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ is een Möbius-transformatie.
Een Möbius-transformatie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is een transformatie samengesteld uit een eindig aantal van de volgende transformaties (in vector-notatie)
1. translatie $f(x) = x+a$
2. homothetische transformatie $f(x) = rx$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.
3. orthogonale transformatie: f is lineair en $|f(x)| = |x|$, voor alle $x \in \mathbb{R}^n$.
4. inversie ten opzichte van een bol met middelpunt a en straal r



$$f(x) = a + \frac{r^2(x-a)}{|x-a|^2}.$$

Deze stelling ligt op het terrein van de differentiaalmeetkunde en zij wordt bewezen onder zekere differentieerbaarheidsonderstel-

lingen van de afbeelding. Tot in onze jaren zoekt men bewijzen onder steeds zwakkere onderstellingen.

Literatuur

(i) W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 2e druk, p. 68.

(ii) Nevanlinna, artikel On differentiable mappings. In Proceedings coll. analytic functions, 1957.

De theorie van de conforme afbeeldingen in $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ kan dus slechts een zeer beperkte theorie zijn. Om ook voor deze ruimten een bredere theorie te krijgen, zijn de quasi-conforme afbeeldingen ingevoerd. Er wordt dan een zwakkere eis dan invariantie van de hoek gesteld. Zie hiervoor: Ahlfors, lectures on quasiconformal mappings (1966).

III Speciale afbeeldingen

Als voorbeeld van afbeeldingen behandelen we de zgn. lineaire transformatie, die aanleiding zal geven tot enige beschouwingen over de hyperbolische meetkunde.

A. Onder een lineaire transformatie verstaat men een transformatie van de vorm

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \qquad ad-bc \neq 0.$$

We behandelen een aantal eigenschappen, veelal zonder bewijs (men zie de aangegeven literatuur).

1. De lineaire afbeelding is 1-1 wegens

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}.$$

2. De afbeelding is conform wegens

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)} \neq 0 \text{ mits } z \neq -\frac{d}{c}.$$

Analyseer zelf de gevallen voor $z = -\frac{d}{c}$ en $z = \infty$.

3. Herleiding:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}.$$

Hieruit blijkt dat de algemene lineaire transformatie is op te bouwen uit de volgende transformaties:

α. <u>translatie</u> $w = z+h$

β. <u>homothetie en rotatie</u> $w = kz, \quad k \neq 0.$

γ. <u>inversie en spiegeling</u> $w = \frac{1}{z}.$

In de elementaire meetkunde bewijst men:

een translatie is equivalent met 2 spiegelingen ten opzichte van evenwijdige lijnen;

een homothetische transformatie is equivalent met 2 inversies ten opzichte van concentrische cirkels;

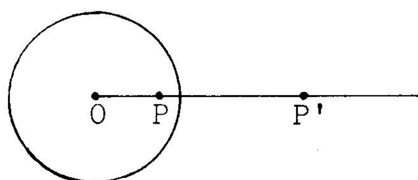
een rotatie is equivalent met 2 spiegelingen ten opzichte van snijdende lijnen.

Hieruit volgt:

<u>De algemene lineaire transformatie reduceert zich tot een even aantal spiegelingen en inversies ten opzichte van lijnen resp. cirkels</u>.

<u>De inversie ten opzichte van een cirkel</u>

Zij S een cirkel met middelpunt 0 en straal r. Onder inversie ten opzichte van S verstaat men de transformatie waarbij aan het punt P wordt toegevoegd het punt P' zó dat



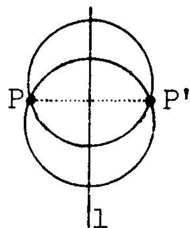
$$\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2.$$

Analoog in $\mathbb{R}^n$ t.o.v. een sfeer.

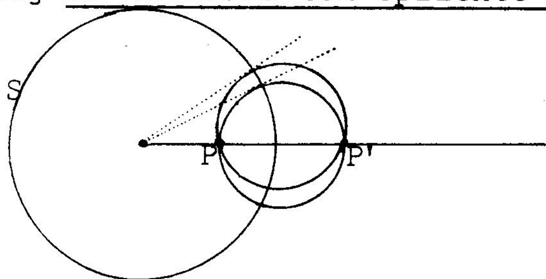
In de literatuur vat men spiegelingen en inversies wel samen onder de naam <u>symmetrie</u>. Een spiegeling is dan een inversie ten opzichte van een lijn, opgevat als cirkel door het punt ∞.

Motivering

Spiegeling om een lijn l. De bundel van cirkels gaande door P die l loodrecht snijden heeft het spiegelingspunt P' als 2e basispunt.



Bij de inversie ten opzichte van een cirkel S doet zich een analoog geval voor. De bundel van de cirkels door P die S loodrecht snijden heeft als 2e basispunt het inverse punt P' van P.



De twee gevallen kan men in elkaar overvoeren door een passende inversie zó dat S overgaat in een rechte lijn (ga dit zelf na). Houdt men nu rekening met de decompositie van de lineaire transformatie, dan volgt:

Bij de algemene lineaire transformatie gaan punten die symmetrisch zijn ten opzichte van een lijn of een cirkel over in punten die symmetrisch liggen ten opzichte van het beeld.

Opmerking. De transformatie $w = \frac{1}{z}$ is geen inversie in de meetkundige zin (denk om het argument).

4. De lineaire transformaties vormen een groep.

5. Cirkels en rechte lijnen gaan over in cirkels en rechte lijnen. Deze zijn nl. gemeenschappelijk voor te stellen door de vergelijking

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0.$$

Substitueer dan.

6. $$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

is univalent. Stel nl.

$$w(z_1) = w_1, \quad w(z_2) = w_2.$$

Dan is

$$w_1-w_2 = \frac{A(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}, \qquad A = ad-bc.$$

Daaruit volgt dat $z_1 \neq z_2 \Rightarrow w_1 \neq w_2$.

7. Uit de voorgaande betrekking volgt

$$\frac{(w_1-w_4)(w_3-w_2)}{(w_1-w_2)(w_3-w_4)} = \frac{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)},$$

zodat geldt:

<u>De dubbelverhouding van 4 punten is invariant bij de lineaire transformatie</u>.

Stel $z_4 = z$, $w_4 = w$. Dan volgt hieruit dat de algemene lineaire transformatie is van de vorm

$$\frac{(w_1-w)(w_3-w_2)}{(w_1-w_2)(w_3-w)} = \frac{(z_1-z)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z)}.$$

<u>Een lineaire transformatie is bepaald door 3 punten en hun beelden</u>.

8. Neem nu het w-vlak identiek met het z-vlak. Men klassificeert dan de lineaire transformaties naar de dubbelpunten. De dubbelpunten van de transformatie

$$z = \frac{az+b}{cz+d}$$

volgen uit

$$cz^2+(d-a)z-b = 0.$$

Vallen de dubbelpunten samen dan spreekt men van een <u>parabolische transformatie</u>.

Men onderzoekt de transformatie in verband met de beelden van cirkels en rechte lijnen.

(α) Samenvallende dubbelpunten.

Zij z_1 dit dubbelpunt; stel $z_1 \neq \infty$. Beschouw de hulptransformatie

$$u = \frac{1}{z-z_1}, \quad U = \frac{1}{w-z_1}.$$

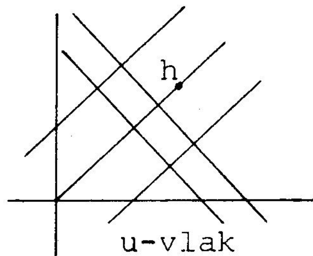
In het u-vlak vindt men dan $z = \infty$ als dubbelpunt. Uit de vergelijking voor de dubbelpunten concludeert men dat de afbeelding in het u-vlak luidt

$$U = u+h$$

en dus in het z-vlak

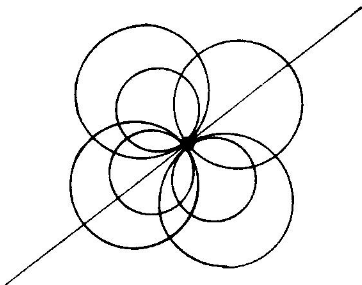
$$\frac{1}{w-z_1} = \frac{1}{z-z_1} + h \qquad (z_1 \neq \infty).$$

Illustratie:



de lijnen evenwijdig h blijven invariant (niet puntsgewijs!). De lijnen loodrecht op l gaan in elkaar over.

In het z-vlak krijgt men een stelsel van orthogonale cirkels, waarvan de cirkels van het ene stelsel invariant zijn en de cirkels van het andere stelsel in elkaar overgaan.



Dit beeld krijgt men in principe ook in het andere geval. Er is een bundel van cirkels die invariant zijn, en een daarmee orthogonale bundel van cirkels die in elkaar overgaan.

(β) Stel de dubbelpunten zijn z_1 en z_2, $z_1 \neq z_2$, $z_1 \neq \infty$, $z_2 \neq \infty$. De kanonieke vorm is

$$T: \quad \frac{w-z_1}{w-z_2} = k\,\frac{z-z_1}{z-z_2}, \qquad k \in \mathbb{C}.$$

T heet <u>elliptisch</u> als $k = e^{i\theta}$.

T heet <u>hyperbolisch</u> als $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, $k \neq 1$.

In de andere gevallen noemt men T <u>loxodromisch</u>.

<u>Elliptische geval</u>

Daar de substitutie

$$u = \frac{z-z_1}{z-z_2}$$

brengt men één dubbelpunt naar ∞. Dan komt

$$U = e^{i\theta}u,$$

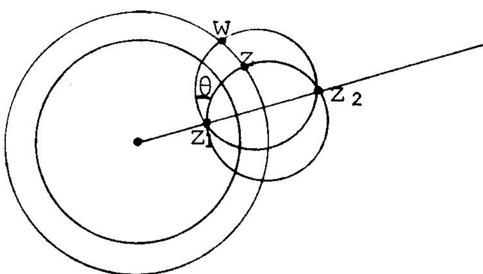
d.i. een rotatie om $u = 0$. Ten opzichte van z en w:

$$\frac{w-z_1}{w-z_2} = e^{i\theta}\,\frac{z-z_1}{z-z_2},$$

waaruit volgt

$$\left|\frac{w-z_1}{w-z_2}\right| = \left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|, \qquad \arg\frac{w-z_1}{w-z_2} = \arg\frac{z-z_1}{z-z_2} + \theta.$$

De eerste betrekking betekent dat w en z liggen op een cirkel ten opzichte waarvan z_1 en z_2 symmetrisch liggen (ga dit zelf na). Deze cirkels zijn invariant. De cirkels van de cirkelbundel gaande door z_1 en z_2 die orthogonaal met de eerstgenoemde is gaan bij de afbeelding in elkaar over. De cirkels waarop z resp. w liggen snijden elkaar onder een hoek θ. Men zegt dat deze afbeelding een <u>niet-euclidische rotatie</u> is (dit wordt later duidelijk).



Onderzoek zelf het hyperbolische geval; er zijn ook in dit geval orthogonale cirkelbundels mee verbonden.

Bij het parabolische geval, het elliptische geval en het hyperbolische geval zijn er invariante cirkels. In de andere gevallen niet.

9. Lineaire afbeelding van de cirkel $|z| < 1$ op zichzelf.

Stel $0 \to \alpha \neq 0$ ($\alpha = 0$ is triviaal). Wegens het symmetrieprincipe zijn dan ∞ en $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ aan elkaar toegevoegd. Dan wordt de afbeelding

$$w = \lambda \frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}} .$$

Uit de eigenschappen van de inversie volgt dat

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}}\right| = |\alpha| \quad \text{voor } |z| = 1$$

waaruit dan volgt $|\lambda||\alpha| = 1$ zodat

$$w = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-z\bar{\alpha}} , \qquad |\alpha| < 1.$$

Omgekeert definieert elke transformatie van deze vorm een afbeelding van $|z| < 1$ op zichzelf. Maar er geldt meer.

Stelling. Elke een-eenduidige conforme afbeelding van $|z| < 1$ op zichzelf is lineair.

Dit bewijst men met behulp van het lemma van Schwarz.

Lemma van Schwarz. Zij f holomorf in $|z| < 1$. Zij $f(0) = 0$ en $|f(z)| \leqslant 1$ voor $|z| < 1$. Dan is

$$|f(z)| \leqslant |z| .$$

Als voor één z hier het gelijkteken geldt, dan geldt dat voor alle z en dan is $f(z) = e^{i\theta}z$.

Bewijs. Beschouw

$$\phi: \frac{f(z)}{z} \quad \text{in } |z| < 1.$$

Deze functie is holomorf in $|z| < 1$. Zij $0 < \rho < 1$. In $|z| \leqslant \rho$ neemt $|\phi|$ het maximum aan op de rand $|z| = \rho$ (maximumprincipe). Dus is

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \frac{1}{\rho}$$

waaruit volgt

$$|f(z)| \leqslant |z|.$$

Als geldt

$$\left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| = 1$$

voor een punt $|z_0| < 1$ en als $\frac{f(z)}{z}$ niet constant is, dan is er een omgeving van z_0, waarin $\frac{f(z)}{z}$ holomorf is en waarin dus de modulus van deze functie niet in z_0 haar maximum kan aannemen. Er is dus zeker een z zó dat

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| > 1,$$

in strijd met hetgeen reeds is bewezen. Daaruit volgt dat $\frac{f(z)}{z}$ constant moet zijn, d.w.z.

$$f(z) = e^{i\theta}z.$$

Deze eigenschap drukt uit dat de afbeelding aan contractie is.
Het lemma van Schwarz kent vele uitbreidingen.

Toepassing op de lineaire afbeelding

Zij $w = f(z)$ een holomorfe 1-1 afbeelding van $|z| < 1$ op zichzelf. Zij $U = L(w)$ een lineaire transformatie zó dat $f(0)$ correspondeert met $U = 0$ en die $|w| < 1$ transformeert in $|U| < 1$. Beschouw de afbeelding $z \to U$ bepaald door

$$U = L(f(z)) = \phi(z).$$

Dan is $\phi(0) = 0$, $|\phi| < 1$ in $|z| < 1$. Pas het lemma van Schwarz toe; daaruit volgt

$$|U| \leq |z|.$$

Daar f en L een-eenduidig zijn, heeft ϕ een inverse die dezelfde eigenschappen heeft. Dus is

$$|U| \geq |z|,$$

zodat $|U| = |z|$ voor $|z| < 1$.

$$U = ze^{i\theta},$$

$$\phi(z) = ze^{i\theta},$$

$$f(z) = L^{-1}(e^{i\theta}z),$$

wat te bewijzen was.

In de lineaire transformatie van $|z| < 1$ op zichzelf kan men het middelpunt nog laten corresponderen met een willekeurig punt in $|z| < 1$. Als $z = 0$ is toegevoegd aan $w = 0$, dan is de transformatie een rotatie.

In de laatste stelling is de eis dat de afbeelding 1-1 is essentieel. De afbeelding $w = z^2$ beeldt $|z| < 1$ ook op zichzelf af maar is niet lineair.

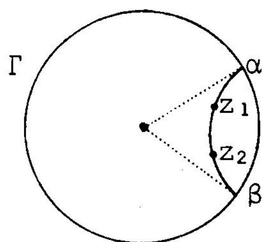
Toepassing op de hyperbolische meetkunde

De theorie van de afbeeldingen van $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$ op zichzelf die we hiervoor beschouwen kan worden toegepast op een model voor de hyperbolische meetkunde (de meetkunde van Bolyai en Lobatschewsky).

Als hyperbolisch vlak wordt aangemerkt de eenheidscirkel $|z| < 1$. De punten van het vlak zijn de punten waarvoor $|z| < 1$. De lijnen zijn de delen van de cirkels orthogonaal met $|z| < 1$ gelegen in $|z| < 1$. Verifieer de axioma's.

De niet-euclidische bewegingen zijn de lineaire transformaties van Δ op zichzelf. Daarbij gaan cirkels over in cirkels en we-

gens de conformiteit blijft de orthogonaliteit behouden. Bij deze bewegingen gaan dus inderdaad niet-euclidische rechte lijnen over in niet-euclidische rechte lijnen.
Wegens de conformiteit van de bewegingen kan het hoekbegrip in deze niet-euclidische meetkunde worden overgenomen uit de euclidische meetkunde. Het begrip afstand moet zodanig worden gedefinieerd dat het invariant is bij de hyperbolische bewegingen. De euclidische afstand heeft deze eigenschap niet. De dubbelverhouding van 4 punten, die invariant is bij niet euclidische bewegingen, leidt tot het afstandsbegrip. De afstand van z_1 en z_2 moet



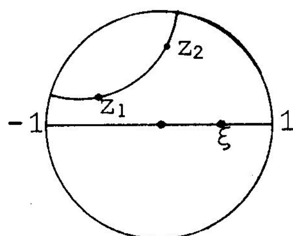
worden gemeten langs de rechte lijn die z_1 en z_2 verbindt, d.w.z. de cirkel door z_1 en z_2 orthogonaal met Γ. De dubbelverhouding (α,β,z_1,z_2) is invariant en een functie daarvan eveneens. Men bepaalt die functie zó, dat aan de additiviteit voor 3 punten z_1,z_2,z_3 op een rechte lijn is voldaan. Dit leidt tot

$$d(z_1,z_2) = \log(\alpha,\beta,z_1,z_2).$$

De additiviteit volgt uit de betrekking

$$(\alpha,\beta,z_3,z_1) = (\alpha,\beta,z_2,z_1)(\alpha,\beta,z_3,z_2).$$

Aan de driehoeksongelijkheid is voldaan. Men kan het bewijs uit de euclidische meetkunde overnemen omdat daarbij het parallellen-axioma niet wordt gebruikt.
Als z_1 nadert tot α nadert d tot ∞; Γ is dus te beschouwen als het "oneindige" voor het hyperbolische vlak. De afstand van de punten z_1 en z_2 wordt als volgt berekend.
Beschouw de niet-euclidische beweging waarbij $z_1 \to 0$ en $z_2 \to \xi$, $\xi \in \mathbb{R}$, $|\xi| = \rho$. Wegens de invariantie van d is



$$d(z_1,z_2) = d(0,\xi) =$$

$$= \log(-1,+1,\xi,0) = \log \frac{1+\rho}{1-\rho} .$$

Met behulp van de uitdrukking voor de lineaire transformatie volgt dan

$$d(z_1,z_2) = \log \frac{1+r}{1-r}$$

waarin

$$r = \left| \frac{z_2-z_1}{1-z_2\bar{z}_1} \right| .$$

Hieruit bepaalt men de lengte van een rectificeerbare kromme als volgt. Men heeft

$$d(z,z+\Delta z) = \log \frac{1+r}{1-r} , \qquad r = \frac{|\Delta z|}{|1-(z+\Delta z)\bar{z}|} .$$

Laat nu $\Delta z \to 0$, dus $r \to 0$. Men vindt dan de Riemannse metriek

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2} .$$

De niet-euclidische lengte van een kromme γ: $z = z(t)$ wordt

$$\int_\gamma \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = 2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{|z'(t)|}{1-|z^2(t)|} dt.$$

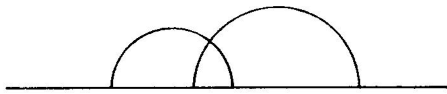
Vergelijk met de euclidische metriek

$$ds = |dz| = ((dx)^2+(dy)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Men kan met deze niet-euclidische metriek meetkunde gaan bedrijven. Een niet-euclidische cirkel is de verzameling van de punten z met gegeven afstand R tot een gegeven punt z_1. Men vindt met de formule voor $d(z_1,z_2)$ de betrekking

$$\frac{|z-z_1|}{|1-z\bar{z}_1|} = \frac{e^R-1}{e^R+1} .$$

Beeldt men het bovenhalfvlak $\mathrm{Im}(z) > 0$ af op de eenheidscirkel, dan krijgt men een ander model van de hyperbolische meetkunde. Rechte lijnen worden dan de cirkels en rechte lijnen orthogonaal op de X-as, voor zover betreft het deel in het bovenhalfvlak. Men vindt dan voor de afstand van de punten z_1 en z_2



$$D(z_1,z_2) = \log \frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{z_1-\bar{z}_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{z_1-\bar{z}_2}\right|}.$$

De booglengte ds wordt in dit geval gegeven door

$$ds = \frac{|dz|}{y}.$$

De lineaire afbeelding van $\mathrm{Im}(z) > 0$ op $|w| < 1$ wordt gegeven door

$$w = \frac{az+b}{\bar{a}z+\bar{b}}$$

waarin $\mathrm{Im}(\frac{b}{a}) < 0$.

De lineaire afbeelding van het bovenhalfvlak op zichzelf is gegeven door

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

met $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc > 0$. Ga dit zelf na.

<u>Niet-euclidische formulering van het lemma van Schwarz</u>

Zij $w = f(z)$ regulier in $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$ en zij $|f(z)| < 1$. Neem $z_0 \in \Delta$. We beelden de eenheidscrikel in het z-vlak resp. het w-vlak op zichzelf af door de transformaties

$$t = \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}, \qquad \omega = \frac{w-f(z_0)}{1-\bar{f}(z_0)w}.$$

De functie $\omega = \omega(t)$, verkregen door eliminatie van z, voldoet aan de voorwaarden van het lemma van Schwarz zodat

$$|\omega(t)| \leq |t|.$$

Terugvertaald in z en w vindt men

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| \leq \frac{|z_1-z_2|}{|1-\bar{z}_1 z_2|}, \qquad z_1,z_2 \in \Delta,$$

en met de formule voor de hyperbolische afstand:

$$d(f(z_1),f(z_2)) \leq d(z_1,z_2).$$

Dus:

Een reguliere afbeelding van de eenheidscirkel in zichzelf vergroot niet de niet-euclidische afstand van puntenparen.

Scherper: men heeft

$$d(f(z_1),f(z_2)) < d(z_1,z_2)$$

ofwel voor alle z_1 en z_2 is

$$d(f(z_1),f(z_2)) = d(z_1,z_2)$$

en in dit laatste geval is f een Möbius-transformatie van de eenheidscirkel op zichzelf.

Deze stelling laat zich gemakkelijk uitbreiden tot de eigenschap dat de niet-euclidische lengte van rectificeerbare krommen niet vergroot wordt (theorema van Pick).

Uit de bovenstaande ongelijkheid volgt nog (neem z_1 vast en laat $z_2 \to z_1$)

$$|f'(z)| < \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$$

voor alle $|z| < 1$ ofwel voor alle $|z| < 1$ is

$$|f'(z)| = \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

In het vervolg van dit college worden meer ongelijkheden van dit type behandeld voor univalente functies.

Toepassing

De hyperbolische metriek kan worden toegepast om enkele klassieke stellingen aangaande de waardeverzameling van analytische functies te bewijzen.

Men voert een algemene Riemannse metriek in door

$$ds^2 \doteq \rho^2(dx^2+dy^2), \quad \rho = \rho(x,y), \quad \rho > 0,$$

of ook $ds = \rho|dz|$.

De hyperbolische metriek op Δ is een bijzonder geval, nl.

$$ds = \lambda|dz|$$

$$\lambda(z) = \frac{2}{1-|z|^2} .$$

Men voert in de grootheid

$$K(\rho) = -\rho^2\Delta(\log \rho), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} .$$

Dit is de zogenaamde kromming van de metriek. Berekening leert dat K constant is voor de hyperbolische metriek, nl. $K = -1$.

K is invariant bij conforme afbeeldingen.

Men vergelijkt de metrieken $\lambda|dz|$ en $\rho|dz|$.

Stelling 1. Wanneer ρ voldoet aan $K(\rho) \leq -1$ in Δ, dan is $\lambda(z) \geq \rho(z)$ voor alle $z \in \Delta$.

Men voert deze stelling terug tot het maximumprincipe voor subharmonische functies (onder voldoende regulariteitsonderstellingen zijn dat functies waarvoor $\Delta u \leq 0$; zie het dictaat potentiaaltheorie).

Door een afbeelding $w = f(z)$ van $|z| < 1$ in een Riemann oppervlak transformeert men een op $|z| < 1$ gegeven metriek ρ in een metriek ρ_w door

$$ds = \rho_w|dw| = \rho|dz|, \quad \rho_w = \rho|f'(z)|.$$

Een metriek $\rho|dz|$, $\rho \geq 0$ heet ultrahyperbolisch in een gebied

Ω indien het volgende geldt:

(1) ρ is boven semi-continu.

(2) Voor elke $z_0 \in \Omega$ met $\rho(z_0) > 0$ bestaat er een zgn. "dragende" metriek ρ_0, gedefinieerd en van klasse C^2 in een omgeving V van z_0 zó dat $\Delta \log \rho_0 \geqslant \rho_0^2$ en $\rho(z_0) = \rho_0(z_0)$, $\rho \geqslant \rho_0$ in V.

Op overeenkomstige wijze als stelling 1 bewijst men: *is* ρ *ultra-hyperbolisch, dan is* $\lambda(z) \geqslant \rho(z)$.

Stelling 2. Zij f *een analytische afbeelding van* $|z| < 1$ *in een gebied* Ω. *Zij op* Ω *gegeven een ultrahyperbolische metriek* ρ. *Dan is*

$$\rho(f(z))\cdot|f'(z)| \leqslant \frac{2}{1-|z|^2} .$$

Volgt direct uit de definities.

Met deze middelen bewijst men de volgende stellingen.

Stelling 3. Zij f *analytisch in* $|z| < 1$ *en stel* f *neemt in* $|z| < 1$ *de waarden* 0 *en* 1 *niet aan. Dan is*

$$\log|f(z)| \leqslant [7+\overset{+}{\log}|f(0)|]\frac{1+|z|}{1-|z|} .$$

Hierin is

$$\overset{+}{\log}|f(0)| = \max(\log|f(0)|,0).$$

Men bewijst deze stelling met behulp van schattingen van ultra-hyperbolische metrieken in de open verzameling $\Omega_{0,1}$, dit is het complement van de verzameling $\{0,1\}$.

Stelling 4 (Picard). Stel f *is meromorf in het gehele vlak en stel* f *neemt drie waarden niet aan. Dan is* f *constant*.

Bewijs. Stel f neemt de waarden a,b,c niet aan. Dan is

$$F = \frac{c-b}{c-a}\,\frac{f-a}{f-b}$$

holomorf en F neemt de waarden 0 en 1 niet aan.

Pas stelling 3 toe op $F(Rz)$, $R > 0$. Merk eerst op dat $|F(z)|$

naar boven begrensd is op $|z| = \frac{1}{2}$ (zie de schatting in het rechterlid). Daaruit volgt dat $\left|F\left(R\frac{e^{i\theta}}{2}\right)\right|$ naar boven begrensd is, onafhankelijk van R en θ. Dus is $|F(z)|$ begrensd in het gehele vlak en volgens de stelling van Liouville is F dus constant en daarmede ook f.

Vergelijk deze stelling met de stellingen over de waardeverzameling van analytische functies in de omgeving van een essentieel singulier punt.

Corollarium. Een gehele functie die drie waarden niet aanneemt is constant.

Merk op dat een gehele functie de waarde ∞ niet aanneemt.

IV. De afbeeldingsstelling van Riemann

De afbeeldingsstelling van Riemann gaat over de comforme afbeelding van enkelvoudig samenhangende open verzamelingen in het z-vlak op de eenheidscirkel $\Delta = \{w \,|\, |w| < 1\}$ in het w-vlak.

Stelling van Riemann. Elk enkelvoudig samenhangend open ______ Ω met tenminste 2 randpunten kan eeneenduidig conform worden afgebeeld op Δ.

De conditie over de randpunten is essentieel. Stel Ω heeft één randpunt. We kunnen onderstellen dat dit is het punt ∞ want men kan het algemene geval daartoe terugbrengen door de transformatie $\xi = \frac{1}{z-z_0}$. Volgens de stelling van Liouville uit de complexe functietheorie is elke analytische functie f waarvoor $|f(z)| < 1$ is voor elke eindige z een constante; een afbeelding op $|w| < 1$ bestaat dus niet.

Er is nog vrijheid in de afbeeldingsfunctie. Men kan nog voorschrijven: (i) een vast maar willekeurig punt z_0 van Ω gaat over in $w = 0$; (ii) een voorgeschreven richting in dat vaste punt gaat over in de richting van de positieve u-as ($w = u+iv$). De tweede conditie geeft een conditie ten aanzien van de afgeleide van de

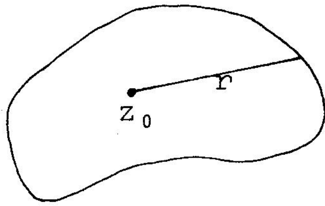
afgeleide van de afbeeldingsfunctie in het vaste punt.
Onder deze condities is de afbeeldingsfunctie uniek. Waren er twee, dan vindt men daaruit door samenstelling een afbeelding van Δ op zichzelf met invariantie van het middelpunt en de positieve u-as. Dit is dan de identiteit.

Bewijsmethoden

1. Rechtstreeks met functietheoretische middelen. Men bewijst de existentie met behulp van convergentiebeschouwingen van zekere rijen van analytische functies.
2. Met bewijsmethoden ontleend aan de potentiaaltheorie. Het probleem wordt dan gereduceerd tot het zogenaamde probleem van Dirichlet, meer in het bijzonder tot de existentie van de functie van Green voor Ω.

We beperken ons tot een korte schets van de tweede methode. Men gebruikt de volgende eigenschap.
Zij Ω enkelvoudig samenhangend. Zij u harmonisch in Ω. Dan bestaat er een tot op een additieve constante na bepaalde harmonische functie v in Ω zodanig dat $u+iv$ een analytische functie is van $z = x+iy$.
Men vindt v door oplossing naar v van de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann. De harmonische functie v heet de geconjugeerde van u.
Opmerking. Laat men de eis van de enkelvoudige samenhang vallen, dan is v niet een eenwaardige functie.
Voorbeeld: $\log z = \log|z| + i \arg z$ met $u = \log|z|$, $v = \arg z$; v wordt pas eenwaardig na het aanbrengen van een coupure.
Zij nu Ω enkelvoudig samenhangend en begrensd (men kan zich van de laatste conditie ontdoen). Er moet worden geconstrueerd een analytische functie f op Ω, $w = f(z)$ die Ω eeneenduidig afbeeldt op $|w| < 1$.

Kies $z_0 \in \Omega$. Geef met r aan de euclidische afstand van z_0. Zij dan g de harmonische functie in Ω behorend bij de randwaarden $\log \frac{1}{r}$ op de rand $\partial\Omega$ van Ω.



Beschouw de functie

$$G = \log \frac{1}{r} - g.$$

G heeft de volgende eigenschappen.

(i) G is harmonisch in Ω behalve in z_0 waar zij een singulariteit van de vorm $\log \frac{1}{|z-z_0|}$ heeft.

(ii) $G > 0$.

(iii) G heeft randwaarden 0 op $\partial\Omega$.

G heet de <u>functie van Green</u> van Ω en

$$G(z,z_0) = \log\frac{1}{|z-z_0|} - g(z).$$

Zij h de geconjugeerde harmonische functie van -g. De geconjugeerde van $\log\frac{1}{|z-z_0|}$ is $-\arg(z-z_0)$ (zie hiervoor). Definieer

$$H(x,y) = -\arg(z-z_0) + h(x,y).$$

Dan is G+iH een analytische functie van z met logarithmische singulariteit in z_0. Dan geeft

$$w = f(z) = e^{-G-iH}$$

de verlangde afbeelding op $|w| < 1$.

Uit de singulariteit in z_0 volgt

$$w = f(z) = (z-z_0)F(z)$$

en $F(z) \neq 0$ in Ω, zodat $z = z_0$ wordt afgebeeld op $w = 0$.

$$|f(z)| = e^{-G}, \quad G > 0 \Rightarrow |w| = |f(z)| < 1.$$

Men bewijst vervolgens dat er voor een w_0, $|w_0| < 1$ één en slechts één $z \in \Omega$ is zó dat $f(z) = w_0$. Men moet het aantal nulpunten tel-

len van $f(z)-w_0$. Dit gebeurt door toepassing van de volgende eigenschap:

Zij C een enkelvoudige gesloten kromme in het gebied waarin f analytisch is; $f \neq 0$ op C. f zij eenwaardig en zonder polen. Dan is het aantal N van de nulpunten van f binnen C gelijk aan

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Aangezien niet kan worden geïntegreerd over $\partial\Omega$, beschouwt men een gebied Ω^* zó dat $\Omega^* \subset \Omega$, en telt het aantal nulpunten N^* als z loopt in Ω^*. Kies Ω^* zó dat $\partial\Omega^* = C_z^*$ een gesloten enkelvoudige kromme is (men laat zien dat dat kan). Zij C_w het beeld van C_z^* (we weten nog niet of C_w een enkelvoudige gesloten kromme is). Men heeft

$$N^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_z^*} \frac{f'(z)dz}{f(z)-w_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_w} \frac{dw}{w-w_0}, \qquad w = f(z).$$

We bewijzen dat $N^* = 1$.

(i) Door passende keuze van C_z^* kan men zorgen dat C_w willekeurig dicht bij $|w| = 1$ ligt (denk aan de eigenschappen van de functie van Green). Stel C_w ligt in de ring $|w_0| < |w| < 1$.

(ii) We tonen aan dat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_w} \frac{dw}{w-w_0}$$

het aantal w_0-waarden telt.

Als $w_0 = 0$ geldt wegens $w = (z-z_0)F(z)$ en $F(z) \neq 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_w} d \log w = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_z^*} \frac{dz}{z-z_0} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F'(z)dz}{F(z)} =$$

$$= 1 + 0.$$

Vervolgens is

$$N^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_w} d \log(w-w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_w} d \log w$$

want 0 kan met w worden verbonden zonder C_w te snijden, zodat deze integralen gelijk zijn (Cauchy). Daaruit volgt dan $N^* = 1$. Voor wat betreft de existentie en de eigenschappen van de functie van Green zie men mijn collegedictaat Klassieke potentiaaltheorie. Zie ook: Cohn, Conformal mapping on Riemann surfaces, p. 210 e.v.

V. Univalente functies

Een analytische functie f, gedefinieerd in een gebied Ω van het z-vlak heet univalent als $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$. Het beeldgebied is "schlicht", d.w.z. heeft geen overdekkingen. Men spreekt ook wel van schlichte functies. Neemt men de analytische functie die een enkelvoudig samenhangend gebied Ω afbeeldt op de eenheidscirkel, dan is de inverse functie daarvan een op de eenheidscirkel gedefinieerde univalente functie.
We behandelen de theorie van de univalente functies $w = f(z)$, gedefinieerd op Δ: $\{z \mid |z| < 1\}$.
Men kan een algemener definitiegebied nemen, maar volgens de afbeeldingsstelling van Riemann beperken we de algemeenheid niet door de eenheidscirkel te beschouwen. Men krijgt dan gemakkelijker formules.

1. Coëfficiëntenschattingen.

Zij f univalent in Δ. Daar het verband tussen z en w eeneenduidig is, is $f'(z) \neq 0$ voor alle $z \in \Delta$. Een univalente functie f op Δ kan worden genormaliseerd door de condities $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, want als f univalent is, is dat ook f_1 gedefinieerd door

$$f_1(z) = \frac{f(z)-f(0)}{f'(0)} .$$

Een genormaliseerde univalente functie f in Δ wordt voorgesteld

door een in Δ convergente machtreeks

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots . \qquad (1)$$

Er is in het vervolg ook aanleiding univalente functies op Δ te beschouwen met een pool. Zo'n functie is bijvoorbeeld

$$g(z) = \frac{af(z)+d}{cf(z)+d}, \quad ad-bc \neq 0,$$

als f univalent is. g heeft een pool voor $z = -\frac{d}{c}$ indien die waarde door f wordt aangenomen. Een univalente functie met pool kan overigens slechts één enkelvoudige pool hebben. Die pool kan men in 0 transformeren door

$$g: \; g(z) = f\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right),$$

als f de pool in α heeft. Men kan zo'n functie normaliseren door de conditie dat het residu in de pool gelijk is aan 1. De functie wordt dan voorgesteld door de Laurent-reeks

$$g(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1z^2 + b_2z^2 + \dots . \qquad (2)$$

Is f univalent van de vorm (1), dan is $\frac{1}{f}$ univalent van de vorm (2) [merk op dat f slechts één nulpunt heeft in $z = 0$]. Er bestaat dan verband tussen de coëfficiënten a_i en b_i volgende uit

$$(1+b_0z+b_1z^2+\dots)(1+a_2z+a_3z^2+\dots) = 1.$$

Dit geeft

$$b_0 + a_2 = 0,$$

$$b_1 + b_0a_2 + a_3 = 0, \quad \text{enz.}$$

waaruit volgt

$$b_0 = -a_2$$

$$b_1 = a_2^2 - a_3, \dots .$$

De overgang van f naar $\frac{1}{f}$ en deze betrekkingen tussen de coëfficiënten worden in hetgeen volgt gebruikt.

Het hoofdprobleem uit de theorie van de univalente functies is het volgende

Probleem. Gegeven een reguliere functie f in Δ voorgesteld door de machtreeks (1). Men vraagt nodige en voldoende voorwaarden voor de coëfficiënten a_i opdat f univalent is.

Dit probleem ligt op het grensgebied tussen de theorie van Riemann en die van Weierstrass: het vloeit voort uit de afbeeldingsstelling van Riemann maar anderzijds koppelt het deze oorsprong aan de theorie van de machtreeksen. Het probleem is tot op heden onopgelost, maar met meetkundige beschouwingen kan men wel zekere condities geven.

Opgave. Stel de gehele rationele functie

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

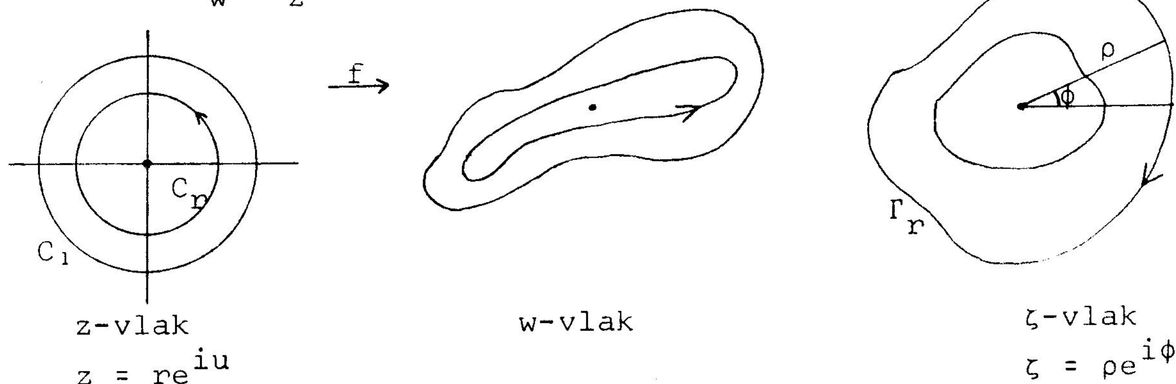
is univalent in $|z| < 1$. Bewijs dat $n|a_n| \leqslant 1$.

We leiden eerst condities af voor de coëfficiënten van $\frac{1}{f}$, dus voor b_i, en daaruit volgen dan betrekkingen voor de a_i. Beschouw een univalente functie van de vorm (2). Het beeldgebied van (2) bevat het punt ∞. Het te gebruiken principe is: het complement van het beeldgebied heeft een oppervlakte $\geqslant 0$. De berekening daarvan leidt tot schattingen van de coëfficiënten b_i.

Stel

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots .$$

Stel $\zeta = \frac{1}{w} = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + \ldots .$



Beschouw eerst de cirkel C_r in het z-vlak ($0 < r < 1$) om bij de afbeelding door f randmoeilijkheden te vermijden. Het beeld van C_r is een analytische kromme binnen het beeldgebied. In het ζ-vlak krijgt men een analytische kromme Γ_r. Men gebruikt: <u>het inwendige van Γ_r heeft een oppervlakte</u> $S_r \geqslant 0$.

<u>Berekening van</u> S_r

$$S_r = \tfrac{1}{2} \int_{\Gamma_r} \rho^2 d\phi$$

Als z in positieve richting C_r doorloopt, dan loopt ζ over Γ_r in negatieve richting. Neem, door bemiddeling van de afbeeldingen, u als parameter langs Γ_r. Dan volgt

$$S_r = -\tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 \frac{\partial\phi}{\partial u} du.$$

ζ en log ζ zijn analytisch in z, dus in log z ($z \neq 0$!).

$$\log \zeta = \log \rho + i\phi,$$

$$\log z = r + iu.$$

Pas de vergelijkingen van Cauchy-Riemann toe op log ζ als functie van log z:

$$\frac{\partial(\log \rho)}{\partial(\log r)} \frac{\partial(\log r)}{\partial r} = \frac{\partial(\log \rho)}{\partial r},$$

dus

$$\frac{\partial(\log \rho)}{\partial(\log r)} = r \frac{\partial(\log \rho)}{\partial r}.$$

Dan is volgens C.R.

$$r \frac{\partial(\log \rho)}{\partial r} = \frac{\partial\phi}{\partial u}, \quad r \frac{\partial\phi}{\partial r} = - \frac{\partial(\log \rho)}{\partial u}.$$

Daaruit volgt

$$S_r = -\tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} r\rho \frac{\partial\rho}{\partial r} du = -\frac{r}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial\rho^2}{\partial r} du.$$

$\rho^2 = \zeta\bar{\zeta} = (\frac{1}{z}+b_0+b_1z+\ldots)(\frac{1}{\bar{z}}+\bar{b}_0+\bar{b}_1\bar{z}+\ldots)$.

Na invulling en integratie ($z = re^{iu}$) volgt dan

$$S_r = \pi[\frac{1}{r^2} - |b_1|^2r^2 - \ldots - n|b_n|^2r^{2n} - \ldots].$$

Zodat

$$|b_1|^2r^2 + 2|b_2|^2r^4 + \ldots + n|b_n|^2r^{2n} + \ldots \leqslant \frac{1}{r^2}.$$

Men laat $r \to 1$ (waarbij men voorzichtig moet zijn bij de convergentie) en vindt dan

$$|b_1|^2 + 2|b_2|^2 + \ldots + n|b_n|^2 + \ldots \leqslant 1.$$

Dit is de zogenaamde <u>ongelijkheid van Bieberbach</u>. Het is een <u>nodige</u> voorwaarde voor univalentie van g.

<u>Schattingen van de coëfficiënten</u> b_i

Uit de ongelijkheid van Bieberbach volgt

$$|b_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n = 1,2,\ldots .$$

Een schatting voor b_0 blijft op dit moment nog open; die volgt later.

De vraag is of deze schatting scherp is, d.w.z. of er een univalente functie met pool in 0 is waarvoor deze grens wordt bereikt.

Merk op, dat als voor zekere n geldt dat $|b_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, dat dan voor alle andere waarden van n moet gelden $b_n = 0$ als gevolg van de ongelijkheid van Bieberbach.

<u>Voor</u> $n > 1$ <u>is de grens niet scherp</u>. Dan is nl.

$$\zeta = \frac{1}{z} + b_0 + b_nz^n = \frac{1}{z} + b_0 + \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{n}} z^n,$$

$$\zeta' = -\frac{1}{z^2} + e^{i\alpha}\sqrt{n}\, z^{n-1}.$$

Deze afgeleide is 0 voor

$$z^{n+1} = \frac{1}{e^{i\alpha}\sqrt{n}},$$

en de modulus daarvan is < 1 als $n > 1$.

Voor $n = 1$ is de schatting scherp, d.w.z. $|b_1| \leqslant 1$ is scherp. Dan is nl.

$$\zeta = \frac{1}{z} + b_0 + ze^{i\alpha},$$

$$\zeta - b_0 = e^{\frac{i\alpha}{2}} \left(ze^{\frac{i\alpha}{2}} + \frac{1}{z} e^{-\frac{i\alpha}{2}} \right).$$

Als z de eenheidscirkel $|z| < 1$ doorloopt, beschrijft ζ het vlak voorzien van een coupure

$$\left(b_0 - 2e^{\frac{i\alpha}{2}}, \quad b_0 + 2e^{\frac{i\alpha}{2}} \right),$$

en de functie is univalent.

Schatting van de coëfficiënten a_i

Zij weer $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ univalent. Voer een hulpfunctie in:

$$f_1(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sqrt{z^2(1 + a_2 z^2 + \ldots)}.$$

Bewijs zelf dat f_1 univalent is. Men heeft

$$\frac{1}{f_1(z)} = \frac{1}{z} - \frac{a_2}{2} z - \ldots .$$

Uit de al bewezen schatting volgt dus

$$|a_2| \leqslant 2,$$

en daar $b_0 = -a_2$ ook $|b_0| \leqslant 2$.

De ongelijkheid $|a_2| \leqslant 2$ is scherp. De grens wordt bereikt voor

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \ldots + nz^n + \ldots .$$

Deze functie is univalent voor $|z| < 1$ en beeldt het z-vlak af op het volle w-vlak voorzien van een coupure van $-\frac{1}{4}$ tot $-\infty$.

Verdere schattingen volgen uit het verband tussen a_i en b_i.

$$|a_2| \leqslant 2$$

$$|a_3| \leqslant |b_1| + |b_0 a_2| \leqslant 1 + 4 = 5$$

$$|a_4| \leqslant |b_2| + |b_1 a_2| + |b_0 a_3| \leqslant 12 + \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Deze voorwaarden zijn <u>nodig</u> voor de univalentie van $z+a_2z^2+\ldots$ maar <u>niet</u> voldoende. Vult men nl. de grenzen voor de b_i in 0 dan is aan deze ongelijkheden voldaan, maar de ongelijkheid van Bieberbach geldt niet, zodat de functie niet univalent is.

<u>Vermoeden van Bieberbach</u>

Nodig en voldoende is

$$|a_n| \leqslant n.$$

Dit is bewezen voor n = 2,3,4,5,6.

2. <u>De constante van Koebe</u>

Beschouw in $|z| < 1$ de univalente functie

$$w = f(z) = z + a_2z^2+\ldots .$$

Veronderstel een waarde $\xi \in \mathbb{C}$ wordt door f <u>niet</u> aangenomen in $|z| < 1$. Voer een hulpfunctie f_1 in

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{1-\frac{f(z)}{\xi}} = z + (a_2+\frac{1}{\xi})z^2 +\ldots .$$

f_1 ontstaat uit f door lineaire afbeelding en is daardoor ook univalent in $|z| < 1$. Volgens het voorgaande is dus

$$|a_2 + \frac{1}{\xi}| \leqslant 2,$$

waaruit volgt

$$\frac{1}{|\xi|} \leqslant |\frac{1}{\xi} + a_2| + |a_2| \leqslant 2 + |a_2|.$$

Uit de univalentie van f volgt $|a_2| \leqslant 2$ zodat

$$\frac{1}{|\xi|} \leqslant 4$$

of

$$|\xi| \geqslant \tfrac{1}{4}.$$

In woorden: <u>de afstand van een niet door</u> f <u>aangenomen waarde in het</u> w-<u>vlak tot</u> w = 0 <u>is groter dan of gelijk aan</u> $\frac{1}{4}$.

Dit is een resultaat van Koebe (± 1910). Deze grens $\frac{1}{4}$ kan niet worden verbeterd, d.w.z. de grens $\frac{1}{4}$ kan niet door een grotere worden vervangen. De functie

$$\frac{z}{(1-z)^2}$$

is univalent in $|z| < 1$ en neemt de waarde $-\frac{1}{4}$ voor $|z| < 1$ niet aan.

3. Vervormingsstellingen

Zij weer $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ univalent in $|z| < 1$. Men kan schattingen geven voor $|f(z)|, |f'(z)|$, enz. en voor $\arg f(z)$, $\arg f'(z), \dots$. Zij beschrijven de vervorming van de eenheidscirkel door de afbeelding in het w-vlak door middel van f. Men leidt die relaties af uit de limitaties voor $|a_i|$ met behulp van afbeelding van de eenheidscirkel op zichzelf.

Beschouw de afbeelding

$$\xi = \frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}, \quad |z_0| < 1,$$

waarbij $z = z_0$ overgaat in $\xi = 0$ en de eenheidscirkel op zichzelf wordt afgebeeld.

$$z = \frac{\xi+z_0}{1+\xi\bar{z}_0}.$$

Door deze transformatie wordt f getransformeerd in

$$\phi(\xi) = f\left(\frac{\xi+z_0}{1+\xi\bar{z}_0}\right).$$

Stel $|z_0| = r$. Reeksontwikkeling in de omgeving van $\xi = 0$ geeft

$$\frac{\xi+z_0}{1+\xi\bar{z}_0} = (\xi+z_0)(1-\xi\bar{z}_0+\xi^2\bar{z}_0^2+\dots).$$

$$\phi(\xi) = f(z_0) + f'(z_0)[\xi(1-r_0^2) - \xi^2\bar{z}_0(1-r_0^2)+\dots]+\dots,$$

en tenslotte

$$\phi(\xi) - f(z_0) = (1-r_0^2)\xi f'(z_0) + \frac{\xi^2}{2}(1-r_0^2)[(1-r_0^2)f''(z_0)- -2\bar{z}_0f'(z_0)]+\dots .$$

$$f_1 : f_1(\xi) = \phi(\xi) - f(z_0) = \phi(\xi) - \phi(0)$$

is holomorf en univalent in $|\xi| < 1$. Pas daarop de voorgaande limitaties toe (er moet rekening mee worden gehouden dat de coëfficiënt van z nu niet $= 1$ is). De limitering voor de coëfficiënt van ξ^2 geeft

$$\left|(1-r_0^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - 2\bar{z}_0\right| \leqslant 4.$$

Vervang z_0 en r_0 door z resp. r. Dan volgt

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{4r}{1-r^2}.$$

Dit betekent dat $z\frac{f''(z)}{f'(z)}$ ligt in de cirkel met middelpunt $\frac{2r^2}{1-r^2}$ op de reële as en met straal $\frac{4r}{1-r^2}$. Splitsing van de ongelijkheid in reëel en imaginair deel geeft dan

$$\frac{2r^2}{1-r^2} - \frac{4r^4}{1-r^2} \leqslant \operatorname{Re}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \leqslant \frac{2r^2}{1-r^2} + \frac{4r}{1-r^2},$$

$$\operatorname{Im}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \leqslant \frac{4r}{1-r^2}.$$

Stel

$$z = re^{i\theta}, \quad P = \log|f'(z)|, \quad Q = \arg f'(z), \quad \log f'(z) = P+iQ$$

is een analytische functie van z.

$$\frac{f''}{f'} = \frac{d}{dz}(\log f'(z)) = \frac{P'_r+iQ'_r}{e^{i\theta}},$$

waarin P'_r, Q'_r afgeleiden naar r.

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = r(P'_r+iQ'_r).$$

Dan volgt uit de voorafgaande ongelijkheden

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leqslant \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leqslant \frac{2r+4}{1-r^2},$$

$$\frac{-4}{1-r^2} \leqslant \frac{\partial}{\partial r}\arg f'(z) \leqslant \frac{4}{1-r^2}.$$

Integreer van 0 tot r en bedenk dat $f'(0) = 1$, dus $\log|f'(0)| = 0$, en $\arg f'(0) = 0$. Dan volgt:

$$\boxed{\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}}$$

$$\boxed{|\arg f'(z)| \leqslant 2 \log \frac{1+r}{1-r}}$$

Dit zijn de <u>vervormingsstellingen van Koebe</u>.

Als $|z_1| < r$, $|z_2| < r$ vindt men

$$\boxed{\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^4 \leqslant \left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^4} \ .$$

Deze ongelijkheden beschrijven de locale vervorming door de afbeelding. De grenzen zijn scherp; bestudeer ze bij de functie $\frac{z}{(1-z)^2}$.

Grenzen voor $|f|$ volgen nu door integratie over het segment van 0 tot z als $|z| = r < 1$.

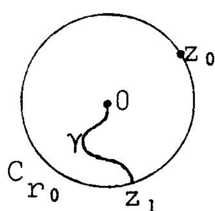
$$|f(z)| = \left|\int_0^z f'(z)dz\right| \leqslant \int_0^r |f'(z)|dr \leqslant$$

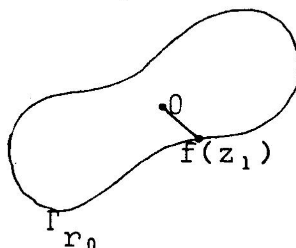
$$\leqslant \int_0^r \frac{1+r}{(1-r)^3}\, dr = \frac{r}{(1-r)^2} ,$$

$$|f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2} .$$

Een ondergrens voor $|f(z)|$ bepaalt men als volgt:

Beschouw z_0 met $|z_0| = r_0 < 1$. Zij C_{r_0} de cirkel $|z| = r_0$ en zij Γ_{r_0} de beeldkromme van C_{r_0}. Zij $f(z_1)$ het punt van Γ_{r_0} met minimumafstand tot 0, dus





$|f(z_0)| \geqslant |f(z_1)|$.

Het beeld van het segment $[0,f(z_1)]$ is een kromme γ in de cirkel $|z| \leqslant r_0$. Op γ is $f'(z)dz > 0$ zodat

$$|f(z_1)| = \int_\gamma |f'(z)|dz.$$

Op γ is volgens het voorgaande

$$|f'(z)| > \frac{1-r}{(1+r)^3}, \qquad |z| = r.$$

Dan volgt

$$|f(z_0)| \geqslant |f(z_1)| \geqslant \int_0^{z_1} \frac{1-r}{(1+r)^3} ds$$

$$\geqslant \int_0^{r_0} \frac{1-r}{(1+r)^3} dr = \frac{r_0}{(1+r)^2}.$$

Tezamen genomen

$$\boxed{\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}}.$$

Hieruit volgt weer de constante van Koebe.

Enkele gevolgtrekkingen uit de ongelijkheden voor $|f|$.

Eerst enkele definities.

Definitie 1. Een familie $\mathcal{F}$ van functies $z \mapsto f(z)$ gedefinieerd in een gebied Ω heet locaal uniform begrensd indien er voor elke $z_0 \in \Omega$ is een omgeving $U(z_0)$ van z_0 en een getal $M(z_0) \geqslant 0$ zó dat

$$|f(z)| \leqslant M(z_0)$$

voor alle $z \in U(z_0)$ en alle $f \in \mathcal{F}$.

Definitie 2. De familie $\mathcal{F}$ heet normaal indien uit elke rij (f_n), $f_n \in \mathcal{F}$, een deelrij (f_{n_i}) kan worden gekozen zó dat

$$\lim_{i\to\infty} f_{n_i}$$

uniform convergeert in elke gesloten $D \subset \Omega$.

Als deze limiet tot $\mathcal{F}$ behoort voor elke convergente deelrij heet $\mathcal{F}$ compact en normaal.

Stelling van Montel. Zijn de functies $f \in \mathcal{F}$ alle regulier in Ω

en is $\mathcal{F}$ locaal uniform begrensd, dan is $\mathcal{F}$ normaal.

Verder geldt (ga zelf het bewijs na):

Stelling. Zijn de functies (f_n) regulier en univalent in Ω en indien $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ bestaat en f niet constant is, dan is f univalent.

Toepassing van de boven bewezen ongelijkheden geeft de volgende resultaten:

Beschouw de familie $\mathcal{F}$ van de genormeerde univalente reguliere functies op $|z| < 1$ (volgens de afbeeldingsstelling is dit laatste geen essentiële beperking). Dan geldt

$\mathcal{F}$ is locaal uniform begrensd.

Wegens de normeringsconditie $f'(0) = 1$ voor alle $f \in \mathcal{F}$, valt de mogelijkheid van convergentie naar een constante functie uit. Dan geldt

$\mathcal{F}$ is compact en normaal.

Volgens de algemene vorm van een stelling van Weierstrass bereikt elke op een compacte verzameling gedefinieerd reële continue functie zijn maximum en minimum op die verzameling. Pas die stelling toe op $\mathcal{F}$ en de functie F

$$F: f \mapsto |a_n|$$

als $f(z) = z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$. Bewijs zelf dat deze functie F continu is. Dientengevolge moet er een univalente functie $f \in \mathcal{F}$ bestaan waarvoor $|a_n|$ een maximale waarde heeft. Voor $|a_2|$ is dit hiervóór al bewezen; hier voldeed de functie

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \ldots .$$

Men vermoedt dat deze functie het maximum bereikt voor alle n. Dit is een open probleem.

Wel zijn enkele zwakkere resultaten bewezen.

(i) Voor alle $f \in \mathcal{F}$ geldt

$$|a_n| \leqslant e \cdot n, \quad n = 2,3,\ldots .$$

(ii) Voor de deelklasse van $\mathcal{F}$ die bestaat uit de genormaliseerde univalente functies waarvan de coëfficiënten van de machtreeks-ontwikkeling reëel zijn geldt $|a_n| \leqslant n$.

(iii) Men kan deze ongelijkheid ook bewijzen voor de univalente functies die $|z| < 1$ afbeelden op een stervormig gebied.

Een gebied dat 0 bevat heet stervormig indien de doorsnede van het gebied met elke lijn door 0 bestaat uit één enkel segment.

Een nodige en voldoende voorwaarde voor stervormigheid van f is dat

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \geqslant 0, \quad |z| < 1.$$

Voor verdere gevallen zie de boeken van Ahlfors en Nehari.

VI. Toepassingen van de potentiaaltheorie

Deze toepassingen vloeien voort uit het feit dat als $w = f(z) = u+iv$, u en v harmonische functies zijn als direct gevolg van de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann. Dit wil zeggen $\Delta u = \Delta v = 0$.

Speciaal het probleem van Dirichlet uit de potentiaaltheorie is belangrijk.

Probleem van Dirichlet. Zij $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ een open verzameling met rand $\partial\Omega$. Zij f een continue reële functie op $\partial\Omega$. Men vraagt naar een functie u die harmonisch is in Ω, d.w.z. $\Delta u = 0$ in Ω, zodanig dat in elk punt $\xi \in \partial\Omega$ geldt dat $u(x) \to f(\xi)$ als $x \in \Omega$ nadert tot ξ.

Men zegt dat u de harmonische functie in Ω met randwaarden f is.

Voor de theorie van dit probleem zie het dictaat klassieke potentiaaltheorie. Is Ω enkelvoudig samenhangend, dan bestaat zo'n

harmonische functie voor elke continue functie f. Als gevolg van het maximumpricipe voor harmonische functies is de oplossing eenduidig bepaald.
We hebben de oplossing van dit probleem voor speciale randwaarden nodig voor de invoering van de zogenaamde harmonische maat. Deze maat vervult een rol in de complexe functietheorie.

1. De harmonische maat

We introduceren de harmonische maat voor open verzamelingen (niet noodzakelijk enkelvoudig samenhangend) waarvan de rand bestaat uit een eindig aantal Jordan-bogen. In de potentiaaltheorie voert men het begrip in voor algemenere gevallen, maar voor ons doel is dit geval voldoende en er worden dan existentieproblemen vermeden.
Zij Ω een gebied met rand $\partial\Omega$. Zij α een deelverzameling van $\partial\Omega$ bestaande uit een eindig aantal Jordan-bogen. Beschouw de harmonische functie in Ω behorende bij randwaarden 1 in de inwendige punten van α en 0 in de inwendige punten van $\partial\Omega-\alpha$. De randwaarden in eindig veel punten blijven aldus onbepaald, maar de harmonische functie is desondanks eenduidig bepaald wegens het maximumprincipe van de harmonische functies. Zij $z \in \Omega$. De waarde van deze harmonische functie in z wordt genoemd de harmonische maat van α gemeten in z ten opzichte van Ω. Men noteert

$$\omega(z,\Omega,\alpha).$$

Merk op, dat de harmonische maat α afhangt van het punt z en het gebied Ω. Wegens de lineariteit van de differentiaalvergelijking van Laplace, is de harmonische maat additief, als verlangd voor een maat.

Maximumprincipe (Lindelöf)

Zij u harmonisch in Ω en $u(z) \leqslant M$. Stel

$$\limsup_{z\to\xi} u(z) \leqslant m$$

voor $\xi \in \partial\Omega$ met uitzondering van een eindig aantal punten ξ_i. Dan is $u(z) \leqslant m$ in Ω.

Bewijs. Neem ter vereenvoudiging aan dat Ω begrensd is en zij d de diameter (het geval van een niet begrensd gebied Ω voert men hiertoe terug door een inversie). Pas dan het maximumprincipe toe op

$$u(z) + \varepsilon \sum_i \log \frac{|z-\xi_i|}{d}, \qquad \varepsilon > 0,$$

en laat $\varepsilon \to 0$.

Hieruit volgt dat de harmonische maat van α eenduidig bepaald is.

Stelling. De harmonische maat is een conforme invariant.

Beeldt men Ω eeneenduidig conform af op Ω' en gaat de boog α over in de boog α', dan is

$$\omega(z,\Omega,\alpha) = \omega(z',\Omega',\alpha').$$

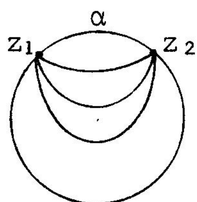
Dit volgt uit het feit dat het harmonisch zijn van een functie conform invariant is (ga de randwaarden na).

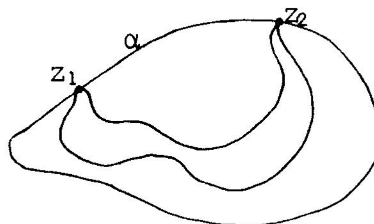
Voorbeelden

(1) Onder een niveaulijn van de harmonische maat verstaat men de verzameling

$$\{z \in \Omega | \omega(z,\Omega,\alpha) = \lambda\}, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

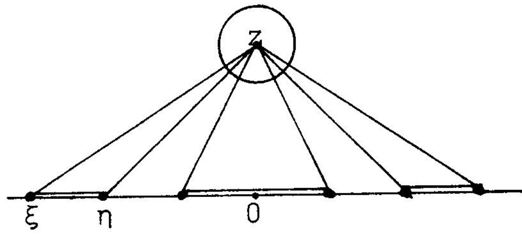
Is Ω het inwendige van een cirkel en α de boog begrensd door de punten z_1 en z_2, dan zijn de niveaulijnen delen van cirkels door z_1 en z_2. Men bewijst dit met behulp van de Poisson-integraal.





In het algemene geval heeft men een analoge situatie.

(2) Neem voor Ω het bovenhalfvlak. Gevraagd de harmonische maat van de vereniging α van een eindig aantal segmenten op de x-as.



Deze blijkt te zijn: $\omega(z,\Omega,\alpha) = \frac{1}{\pi} \times$ totale hoek waaronder α wordt gezien vanuit z. Voor het segment (ξ,η) vindt men nl.

$$\frac{1}{\pi} \arg \frac{z-\xi}{z-\eta}$$

zijnde het reële deel van

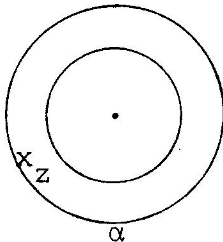
$$-\frac{i}{\pi} \log \frac{z-\xi}{z-\eta} \quad .$$

Ga de randwaarden na!

(3) Neem voor Ω de ring

$$r_1 < |z| < r_2$$

en zij α de cirkel $|z| = r_2$.

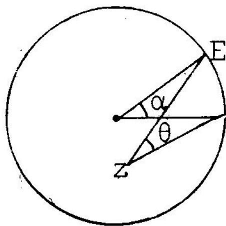


Men heeft

$$\omega(z,\Omega,\alpha) = \frac{\log\frac{|z|}{r_1}}{\log\frac{r_2}{r_1}} \quad .$$

Ga dit na!

(4) Neem voor Ω de cirkel $|z| < r$. Zij E de boog op $|z| = r$ behorende bij de hoek α in $z = 0$. Dan is



$$\omega(z,\Omega,E) = \frac{2\theta-\alpha}{2\pi} \quad ,$$

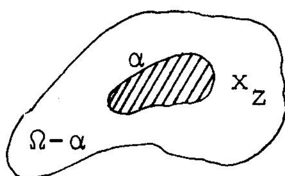
waarin θ de hoek is waaronder E wordt gezien vanuit z.

De volgende eigenschap geeft inzicht in de vraag hoe ω afhangt van Ω.

Zij Ω een gebied en zij $\alpha \subset \overline{\Omega}$, α gesloten. Beschouw het deel E

van de rand van $\Omega-\alpha$ dat tot α behoort. Beschouw de harmonische maat van E t.o.v. $\Omega-\alpha$ en noteer die met

$$\omega(z,\Omega,\alpha).$$



We noteren met (Ω,α) een gebied Ω met verzameling α als hiervoor beschreven.

Stelling. Zij gegeven (Ω,α) en (Ω^*,α^*). Stel f is analytisch in $\Omega-\alpha$ en neemt daar waarden aan in Ω^*. Onderstel dat $z \to \alpha$ impliceert dat $f(z) \to \alpha^*$. Dan is

$$\omega(z,\Omega,\alpha) \leqslant \omega(f(z),\Omega^*,\alpha^*)$$

voor $z \in f^{-1}(\Omega^*-\alpha^*)$.

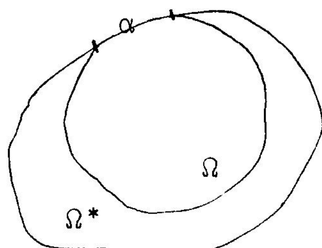
Bewijs. Pas het maximumprincipe voor de harmonische functies en vergelijking van randwaarden toe op ω en $\omega^* = \omega(f(z),\Omega^*,\alpha^*)$ voor $z \in f^{-1}(\Omega^*-\alpha^*)$. Als z nadert tot de rand van die verzameling geldt volgens het gegeven het volgende alternatief:

(1) $z \to$ randpunt niet van α. In dat geval geldt $\omega \to 0$ en $\limsup \omega^* \geqslant 0$.

(2) $f(z) \to \alpha^*$. In dat geval naderen ω en ω^* tot 1. Door vergelijking van randwaarden volgt daaruit de verlangde ongelijkheid.

Bijzonder geval

Stel $\Omega^* \supset \Omega$ en stel een boog α behoort zowel tot de rand van Ω als van Ω^*. Dan is



$$\omega(z,\Omega^*,\alpha) \geqslant \omega(z,\Omega,\alpha).$$

Pas de vorige stelling toe op de identieke afbeelding.

2. De twee-constanten-stelling

Zij

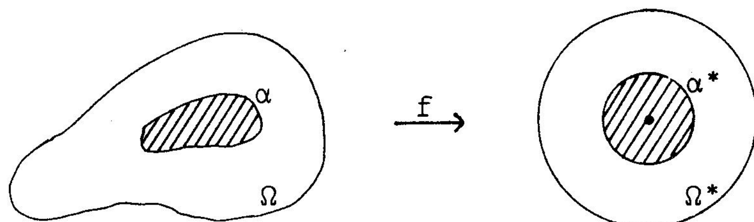
$$\Omega^* = \{w \mid |w| < M\},$$

$$\alpha^* = \{w \mid |w| \leqslant m < M\}.$$

Zij f analytisch in $\Omega-\alpha$, waarbij als in de voorgaande stelling, α en α^* met elkaar corresponderen.

Men heeft

$$\omega(f(z),\Omega^*,\alpha^*) = \frac{\log\frac{M}{|f(z)|}}{\log\frac{M}{m}} .$$



Dan geldt de volgende eigenschap:

<u>Indien</u> $|f(z)| \leqslant M$ <u>in</u> Ω <u>en</u> $|f(z)| \leqslant m$ <u>op</u> α, <u>dan is</u>

$$|f(z)| \leqslant m^{\theta}M^{1-\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

<u>voor alle</u> z <u>in</u>

$$V = \{z|\omega(z,\Omega,\alpha) \geqslant \theta\}.$$

Wegens de voorgaande stelling geldt nl. op V

$$\frac{\log\frac{M}{|f(z)|}}{\log\frac{M}{m}} \geqslant \theta,$$

waaruit de ongelijkheid volgt.

De betekenis van deze stelling is, dat men uit twee schattingen van $|f|$ een nieuwe schatting kan afleiden in een passend gebied.

<u>Corollarium</u>. <u>Zij</u> f <u>analytisch in</u> Ω <u>en zij</u> $|f(z)| \leqslant M$. <u>Stel op</u> <u>een boog</u> α <u>van de rand van</u> Ω <u>geldt</u>

$$\overline{\lim_{z\to\alpha}}\, |f(z)| \leqslant m < M.$$

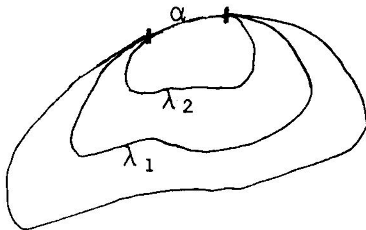
<u>Dan is</u>

$$\log|f(z)| \leqslant \lambda \log m + (1-\lambda)\log M$$

<u>voor alle</u> $z \in \Omega$ <u>waar</u>

$$0 < \lambda < \omega(z,\Omega,\alpha).$$

3. Zij Ω een gebied, f analytisch in Ω, en α een boog op de rand.



Neem λ_1, λ_2 met

$0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant 1$.

Zij

$V = \{z \in \Omega \mid \lambda_1 < \omega(z,\Omega,\alpha) < \lambda_2\}$.

V is een open verzameling. Noteer $m_\lambda = \sup|f(z)|$ voor z op de λ-niveaulijn van ω. Pas de twee-constanten-stelling toe op V. Dat levert

$$\log M_\lambda \leqslant \frac{(\lambda-\lambda_1)\log M_{\lambda_2} + (\lambda_2-\lambda)\log M_{\lambda_1}}{\lambda_2-\lambda_1}$$

voor elke λ waarvoor $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$.

De harmonische maat van de λ_2-niveaulijn t.o.v. V is nl. (let op de randwaarden):

$$\frac{\omega-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} .$$

Anders gezegd:

$\log M_\lambda$ <u>is een convexe functie van</u> λ.

Pas deze eigenschap toe op het geval van een ring $R_1 < |z| < R_2$; neem voor α de cirkel $|z| = R_1$. De harmonische maat ω van α t.o.v. de ring is dan een lineaire functie van $\log|z|$ wegens rotatie-invariantie (bedenk dat $\log r$ harmonisch is). Stel

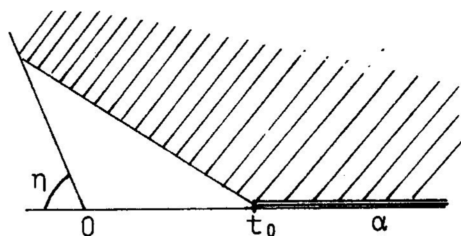
$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad R_1 < r < R_2.$$

Dan volgt:

$\log M(r)$ <u>is een convexe functie van</u> $\log r$.

4. Stel f is analytisch voor $y > 0$ en nog gedefinieerd op de reële as waar f nog continu is. Stel $|f(z)| \leqslant 1$. Onderstel verder dat $\lim f(z) = 0$ als $z \to \infty$ langs de reële as. Dan is dus $|f(z)| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, als z reëel is en $|z| > t_0$ voor zekere t_0. Neem voor Ω het

bovenhalfvlak en zij α het segment van de reële as $> t_0$. De twee-constanten-stelling kan worden toegepast met $M = 1$ en $m = \varepsilon$. Deze



levert dat

$\log|f(z)| \leqslant \lambda \log \varepsilon$

voor alle z waarvoor

$\lambda \leqslant \omega(z,\Omega,\alpha) \leqslant 1.$

Nu is ω gelijk aan $\frac{1}{\pi}$ x de hoek waaronder α wordt gezien vanuit z. Daaruit volgt dat $\lambda \leqslant \omega < 1$ in het gearceerde gebied begrensd door de halfstraal $\arg(z-t_0) = \ (1-\lambda)$. Men heeft dus:

Stelling. Zij f begrensd voor $y > 0$. Stel $f \to c$ als $z \to \infty$ langs de positieve reële as.

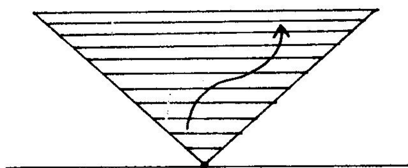
Dan bestaat

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = C$$

in elke hoek bepaald door $0 < \arg z < \pi-\eta$, $\eta > 0$.

Er zijn meer van dit soort stellingen. Bijvoorbeeld een stelling van Lindelöf.

Zij f begrensd en analytisch in een halfvlak. Stel $f(z) \to C$ als $z \to \infty$ langs een boog γ die gaat naar ∞. Dan geldt dat $f(z) \to C$ in elke hoek zó dat γ in het inwendige ligt.



Een dergelijke waarde C heet een asymptotische waarde van f.

Uit het voorgaande volgt:

Een begrensde analytische functie kan geen twee verschillende asymptotische waarden in een halfvlak hebben.

Voor niet begrensde functies (bijv. voor gehele functies) is de situatie op dit punt veel gecompliceerder.

Voor verdere toepassingen van de harmonische maat in de complexe functietheorie zie nog Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen.